

FICHE DE REVISION SUR LES SUITES NUMERIQUES

EXERCICE 1

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right)$$

1. a. Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right)$$

Étudier le sens de variation de f , et tracer sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) . (On prendra comme unité 2 cm).

- b. Utiliser le graphique précédent pour construire les points A_0, A_1, A_2 et A_3 de l'axe $(O; \vec{i})$ d'abscisses respectives u_0, u_1, u_2 et u_3 .
2. a. Montrer que pour tout entier naturel n non nul $u_n \geq \sqrt{2}$.
- b. Montrer que pour tout $x \geq \sqrt{2}$, $f(x) \leq x$.
- c. En déduire que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1.
- d. Prouver qu'elle converge.
3. Soit ℓ la limite de la suite (u_n) . Montrer que ℓ est solution de l'équation

$$x = \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right) \quad \text{En déduire sa valeur.}$$

EXERCICE 2

Pour chaque question, il y a exactement deux propositions correctes. Le candidat doit indiquer sur sa copie les deux propositions vraies. Aucune justification n'est demandée.

Chaque réponse exacte rapporte 0,5 point, chaque réponse fausse enlève 0,25 point. Donner trois propositions ou plus d'une question, ou bien n'en donner aucune, ne rapporte aucun point.

Si, par application de ce barème, le total des points de l'exercice est négatif, il est ramené à zéro.

1. Les suites suivantes sont convergentes :

$$\text{a. } \left(\frac{2^n}{n^{2005}} \right)_{n>0} \quad \text{b. } \left(\frac{2n + (-1)^n \sqrt{n}}{n+1} \right)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{c. } \left(n \sin \frac{1}{n} \right)_{n>0} \quad \text{d. } \left(\frac{\sqrt{n}}{\ln n} \right)_{n>1}$$

2. On considère trois suites (u_n) , (v_n) et (w_n) ayant, pour tout entier naturel n , les propriétés suivantes : $u_n \leq v_n \leq w_n$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = -1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (w_n) = 1$.

Alors :

- a. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n) = 0$.
- b. La suite (u_n) est minorée.
- c. Pour tout n de \mathbb{N} , on a : $-1 \leq v_n \leq 1$.
- d. On ne sait pas dire si la suite (v_n) a une limite ou non.

3. Une suite (u_n) est définie sur \mathbb{N} par $\begin{cases} u_0 & = & 1,5 \\ u_{n+1} & = & 2u_n - 1 \text{ pour tout entier naturel } n. \end{cases}$
- La suite (u_n) converge vers 1, abscisse du point d'intersection des droites d'équations $y = x$ et $y = 2x - 1$.
 - La suite (v_n) , définie sur \mathbb{N} par $v_n = u_n - 1$, est géométrique.
 - La suite (v_n) est majorée.
 - La suite (w_n) , définie sur \mathbb{N} par $w_n = \ln(u_n - 1)$, est arithmétique.
4. Deux suites (x_n) et (y_n) sont définies pour $n > 0$ par les relations :

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \text{ et } y_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}.$$

- Les suites (x_n) et (y_n) sont toutes les deux croissantes.
- $x_3 = \frac{19}{20}$ et $y_3 = \frac{37}{60}$.
- Les suites (x_n) et (y_n) ne sont pas majorées.
- Les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes.

EXERCICE 3

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $] -1 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = x - \frac{\ln(1+x)}{1+x}.$$

La courbe \mathcal{C} représentative de f est donnée sur le document annexe 2 que l'on complétera et que l'on rendra avec la copie.

Partie A : Étude de certaines propriétés de la courbe \mathcal{C}

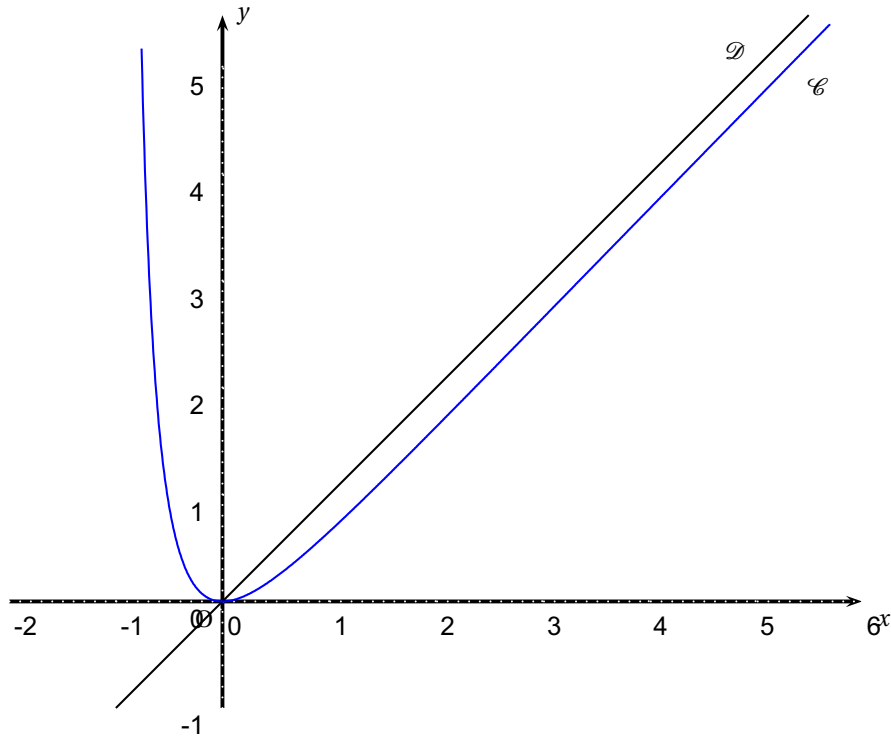
- On note f' la fonction dérivée de f . Calculer $f'(x)$ pour tout x de l'intervalle $] -1 ; +\infty[$.
- Pour tout x de l'intervalle $] -1 ; +\infty[$, on pose $N(x) = (1+x)^2 - 1 + \ln(1+x)$. Vérifier que l'on définit ainsi une fonction strictement croissante sur $] -1 ; +\infty[$. Calculer $N(0)$. En déduire les variations de f .
- Soit \mathcal{D} la droite d'équation $y = x$. Calculer les coordonnées du point d'intersection de la courbe \mathcal{C} et de la droite \mathcal{D} .

Partie B : Étude d'une suite récurrente définie à partir de la fonction f

- Démontrer que si $x \in [0 ; 4]$, alors $f(x) \in [0 ; 4]$.
- On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 4 \text{ et} \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}. \end{cases}$$

- Sur le graphique de l'annexe 2, en utilisant la courbe \mathcal{C} et la droite \mathcal{D} , placer les points de \mathcal{C} d'abscisses u_0, u_1, u_2 et u_3 .
- Démontrer que pour tout n de \mathbb{N} on a : $u_n \in [0 ; 4]$.
- Étudier la monotonie de la suite (u_n) .
- Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On désigne par ℓ sa limite.
- Utiliser la partie A pour donner la valeur de ℓ .



EXERCICE 4

7 points

Le plan est muni d'un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

On s'intéresse aux fonctions f dérivables sur $[0; +\infty[$ vérifiant les conditions

$$\begin{cases} (1) & : \text{ pour tout réel } x \text{ appartenant à } [0; +\infty[, f'(x) = 4 - [f(x)]^2 \\ (2) & : f(0) = 0 \end{cases}$$

On admet qu'il existe une unique fonction f vérifiant simultanément (1) et (2).

Les deux parties peuvent être traitées de manière indépendante. L'annexe sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

Partie A. Étude d'une suite

Afin d'obtenir une approximation de la courbe représentative de la fonction f on utilise la méthode itérative d'Euler avec un pas égal à 0,2.

On obtient ainsi une suite de points notés (M_n) , d'abscisse x_n et d'ordonnée y_n telles que :

$$\begin{cases} x_0 = 0 & \text{ et pour tout entier naturel } n, x_{n+1} = x_n + 0,2 \\ y_0 = 0 & \text{ et pour tout entier naturel } n, y_{n+1} = -0,2y_n^2 + y_n + 0,8 \end{cases}$$

1.
 - a. Les coordonnées des premiers points sont consignées dans le tableau de l'annexe.
Compléter ce tableau. On donnera les résultats à 10^{-4} près.
 - b. Placer, sur le graphique donné en annexe, les points M_n pour n entier naturel inférieur ou égal à 7.
 - c. D'après ce graphique, que peut-on conjecturer sur le sens de variation de la suite (y_n) et sur sa convergence ?
2.
 - a. Pour x réel, on pose $p(x) = -0,2x^2 + x + 0,8$. Montrer que si $x \in [0; 2]$ alors $p(x) \in [0; 2]$.
 - b. Montrer que pour tout entier naturel n , $0 \leq y_n \leq 2$.
 - c. Étudier le sens de variation de la suite (y_n) .
 - d. La suite (y_n) est-elle convergente ?

Partie B. Étude d'une fonction

Soit g la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = 2 \left(\frac{e^{4x} - 1}{e^{4x} + 1} \right)$ et (\mathcal{C}_g) sa courbe représentative.

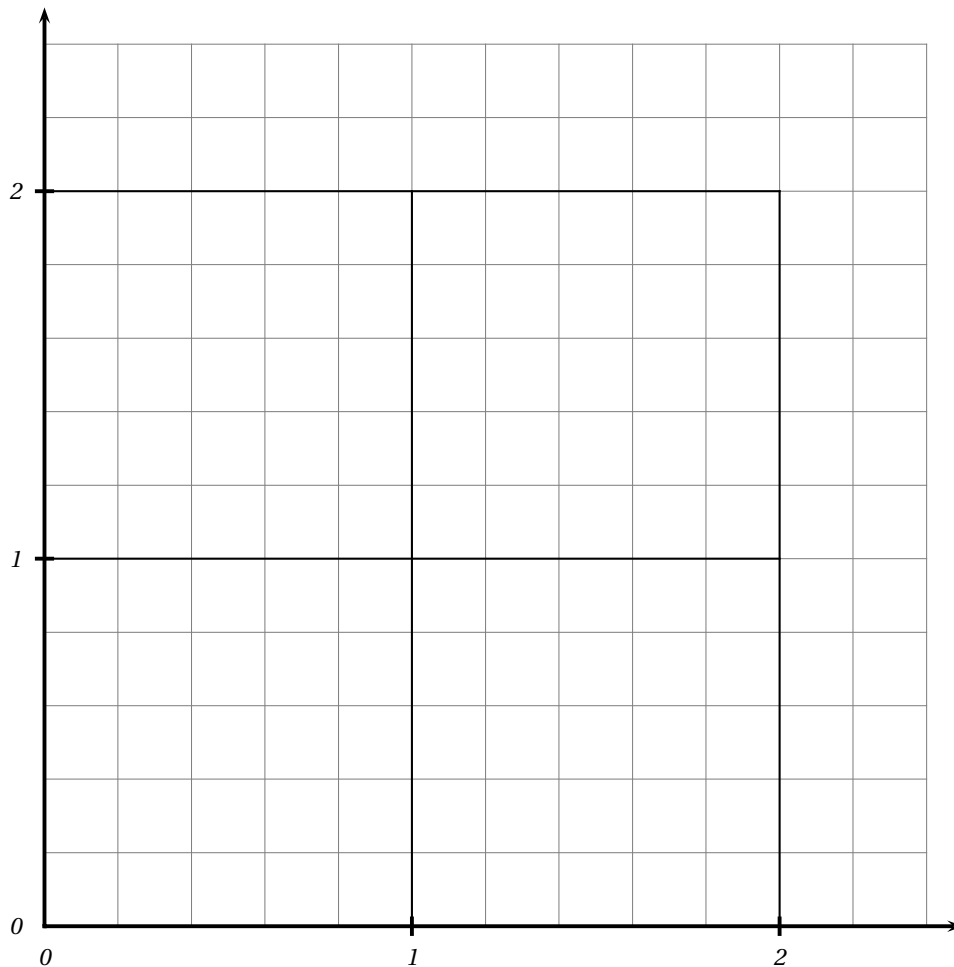
1. Montrer que la fonction g vérifie les conditions (1) et (2).
2. **a.** Montrer que (\mathcal{C}_g) admet une asymptote Δ dont on donnera une équation.
b. Étudier les variations de g sur $[0 ; +\infty[$.
3. Déterminer l'abscisse α du point d'intersection de Δ et de la tangente à (\mathcal{C}_g) à l'origine.
4. Tracer, dans le repère de l'annexe, la courbe (\mathcal{C}_g) et les éléments mis en évidence dans les questions précédentes de cette partie B.

Annexe

Partie A

n	0	1	2	3	4	5	6	7
x_n	0	0,2	0,4					
y_n	0	0,8000	1,4720					

Partie B



EXERCICE 5

Soit la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par

$$f(x) = e^{-x} \cos(4x)$$

et Γ sa courbe représentative tracée dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) de l'annexe. On considère également la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = e^{-x}$ et on nomme \mathcal{C} sa courbe représentative dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. a. Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$,

$$-e^{-x} \leq f(x) \leq e^{-x}.$$

- b. En déduire la limite de f en $+\infty$.

2. Déterminer les coordonnées des points communs aux courbes Γ et \mathcal{C} .

3. On définit la suite (u_n) sur \mathbb{N} par $u_n = f\left(n\frac{\pi}{2}\right)$.

- a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique. En préciser la raison.

- b. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) et étudier sa convergence.

4. a. Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$,

$$f'(x) = -e^{-x} [\cos(4x) + 4 \sin(4x)].$$

- b. En déduire que les courbes Γ et \mathcal{C} ont même tangente en chacun de leurs points communs.

5. Donner une valeur approchée à 10^{-1} près par excès du coefficient directeur de la droite \mathcal{T} tangente à la courbe Γ au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$.

Compléter le graphique donné en annexe, en y traçant \mathcal{T} et \mathcal{C} .

