FICHE DE REVISION SUR LES COMPLEXES

EXERCICE 1

Dans l'exercice, le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Q1	Pour tout n entier naturel non nul, pour tout réel θ, $\left(\text{e}^{\text{i}\theta}\right)^n$ est égal à :	$\text{e}^{\text{i}n\theta}$	☐ Faux ☐ Vrai
		$\cos\left(\theta^n\right) + \text{i}\sin\left(\theta^n\right)$	☐ Faux ☐ Vrai
		$\cos(n\theta) + \text{i}\sin(n\theta)$	☐ Faux ☐ Vrai
Q2	La partie imaginaire du nombre z est égale à :	$\frac{z+\overline{z}}{2}$	☐ Faux ☐ Vrai
		$\frac{z-\overline{z}}{2\text{i}}$	☐ Faux ☐ Vrai
		$\frac{z-\overline{z}}{2}$	☐ Faux ☐ Vrai
Q3	Soit z un complexe tel que $z = x + \text{i}y$ (x et y réels). Si z est un imaginaire pur, alors $\lvert z\rvert^2$ est égal à :	y^2	☐ Faux ☐ Vrai
		$-y^2$	☐ Faux ☐ Vrai
		$-z^2$	☐ Faux ☐ Vrai
Q4	A, B et C sont des points d'affixes respectives a, b et c telles que $\frac{b-a}{c-a} = \text{i}\sqrt{3}$, alors :	$\text{BC} = 2\,\text{AC}$	☐ Faux ☐ Vrai
		$\left(\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AC}}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$	☐ Faux ☐ Vrai
		$\overrightarrow{\text{CA}} \cdot \overrightarrow{\text{CB}} = \text{CA}^2$	☐ Faux ☐ Vrai

EXERCICE 2

1. Dans le plan complexe, on donne les points A, B et C d'affixes respectives $-2+3\text{i}$, $-3-\text{i}$ et $2,08+1,98\text{i}$.
Le triangle ABC est :
(a) : isocèle et non rectangle **(b)** : rectangle et non isocèle
(c) : rectangle et isocèle **(d)** : ni rectangle ni isocèle

2. À tout nombre complexe $z \neq -2$, on associe le nombre complexe z' défini par : $z' = \frac{z-4\text{i}}{z+2}$.
L'ensemble des points M d'affixe z tels que $\lvert z'\rvert = 1$ est :
(a) : un cercle de rayon 1 **(b)** : une droite
(c) : une droite privée d'un point **(d)** : un cercle privé d'un point

3. Les notations sont les mêmes qu' à la question 2.
L'ensemble des points M d'affixe z tels que z' est un réel est :
(a) : un cercle **(b)** : une droite
(c) : une droite privée d'un point **(d)** : un cercle privé d'un point

4. Dans le plan complexe, on donne le point D d'affixe i. L'écriture complexe de la rotation de centre D et d'angle $-\frac{\pi}{3}$ est :

(a) : $z' = \left(\frac{1}{2} - \text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\text{i}$ **(b)** : $z' = \left(-\frac{1}{2} + \text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\text{i}$

(c) : $z' = \left(\frac{1}{2} - \text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\text{i}$ **(d)** $z' = \left(\frac{1}{2} - \text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\text{i}$

EXERCICE 3

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = z^2 - 4z.$$

1. Soient A et B les points d'affixes $z_{\text{A}} = 1 - \text{i}$ et $z_{\text{B}} = 3 + \text{i}$.

a. Calculer les affixes des points A$'$ et B$'$ images des points A et B par f.

b. On suppose que deux points ont la même image par f. Démontrer qu'ils sont confondus ou que l'un est l'image de l'autre par une symétrie centrale que l'on précisera.

2. Soit I le point d'affixe -3.

a. Démontrer que OMIM' est un parallélogramme si et seulement si $z^2 - 3z + 3 = 0$.

b. Résoudre l'équation $z^2 - 3z + 3 = 0$.

3. **a.** Exprimer $(z' + 4)$ en fonction de $(z - 2)$. En déduire une relation entre $|z' + 4|$ et $|z - 2|$ puis entre $\arg(z' + 4)$ et $\arg(z - 2)$.

b. On considère les points J et K d'affixes respectives $z_{\text{J}} = 2$ et $z_{\text{K}} = -4$.
Démontrer que tous les points M du cercle $(\mathscr{C})$ de centre J et de rayon 2 ont leur image M' sur un même cercle que l'on déterminera.

c. Soit E le point d'affixe $z_{\text{E}} = -4 - 3\text{i}$.
Donner la forme trigonomeétrique de $(z_{\text{E}} + 4)$ et à l'aide du **3. a.** démontrer qu'il existe deux points dont l'image par f est le point E.
Préciser sous forme algébrique l'affixe de ces deux points.

EXERCICE 4

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On désigne par I le point d'affixe $z_{\text{I}} = 1$, par A le point d'affixe $z_{\text{A}} = 1 - 2\text{i}$, par B le point d'affixe $-2 + 2\text{i}$ et par $(\mathscr{C})$ le cercle de diamètre [AB].
On fera une figure que l'on complètera avec les différents éléments intervenant dans l'exercice. On prendra pour unité graphique 2 cm.

1. Déterminer le centre Ω du cercle $(\mathscr{C})$ et calculer son rayon.

2. Soit D le point d'affixe $z_{\text{D}} = \dfrac{3 + 9\text{i}}{4 + 2\text{i}}$.
Écrire z_{D} sous forme algébrique puis démontrer que D est un point du cercle $(\mathscr{C})$.

3. Sur le cercle $(\mathscr{C})$, on considère le point E, d'affixe z_{E}, tel qu'une mesure en radians de $\left(\overrightarrow{\Omega\text{I}}, \overrightarrow{\Omega\text{E}}\right)$ est $\dfrac{\pi}{4}$.

a. Préciser le module et un argument de $z_{\text{E}} + \dfrac{1}{2}$.

b. En déduire que $z_{\text{E}} = \dfrac{5\sqrt{2} - 2}{4} + \dfrac{5\sqrt{2}}{4}\text{i}$.

4. Soit r l'application du plan P dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' + \frac{1}{2} = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}\left(z + \frac{1}{2}\right).$$

a. Déterminer la nature de r et ses éléments caractéristiques.

b. Soit K le point d'affixe $z_{\text{K}} = 2$.
Déterminer par le calcul l'image de K par r. Comment peut-on retrouver géométriquement ce résultat ?