Sujet 1

1- Dans l'espace muni du repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère le plan P d'équation $x + y + z - 3 = 0$ ainsi que le point $M(2; -3; 1)$.

a) Le point M est-il dans le plan P ?

b) Donner une représentation paramétrique de la droite D passant par M et orthogonale à P.

c) Déterminer les coordonnées du point H intersection de D et P.

d) En déduire la distance du point M au plan P.

2- Calculer $I = \int_1^2 (2x+1)e^x\,dx$ à l'aide d'une intégration par parties.

Sujet 2

1- On considère la suite u_n définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \sqrt{10\,u_n}$. Déterminer sa limite en utilisant au choix l'une des deux méthodes suivantes.

a) Méthode 1

On pose $v_n = \ln u_n - \ln 10$. Montrer que v_n est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$. En déduire les expressions de v_n et de u_n en fonction de n, puis la limite de u_n.

b) Méthode 2

Montrer que la suite u_n est croissante, puis qu'elle est majorée par 10. Que peut-on en déuire ? Calculer la limite de u_n.

2- Ecrire le nombre complexe $z = 1 + i\sqrt{3}$ sous sa forme exponentielle. En déduire la forme algébrique de z^5.

Sujet 3

1- Soit g la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = x^2 + \ln(x)$.

a) Dresser le tableau de variations de g, avec les limites.

b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique α, puis déterminer un encadrement de α à 10^{-2} près.

c) Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x^2 + (\ln x)^2$. Montrer que f admet un minimum pour $x = \alpha$.

2- On lance une pièce de monnaie 10 fois de suite. On appelle X la variable aléatoire représentant le nombre d'apparitions de PILE.

a) Quelle est la loi de probabilité de X ?

b) Calculer E(X), l'espérance mathématique de X.

c) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 5 fois PILE ?

Sujet 4

1- On pose $\omega = e^{2i\frac{\pi}{5}}$.

a) Calculer ω^5 et prouver que $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4=0$ (on pourra remarquer qu'il s'agit de la somme des premiers termes d'une suite géométrique)

b) Soient $u=\omega+\omega^4$ et $v=\omega^2+\omega^3$. Montrer que $u+v=-1$ et $uv=-1$. Endéduire u et v.

c) En justifiant l'égalité $u=\omega+\overline{\omega}$, utiliser le résultat précédent pour calculer $\cos\frac{2\pi}{5}$.

2- On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}\,e^{1-x}$.

a) Montrer que $f(x)=\frac{e}{\sqrt{x}}\times\frac{x}{e^x}$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Sujet 5

1- On considère l'équation différentielle : (E1): $y'-y=3e^{-2x}$.

a) Soit u une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et v la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $v(x)=u(x)e^{-2x}$.
Démontrer que la fonction v est solution de (E1) si, et seulement si, la fonction u est solution de l'équation différentielle (E2) : $y'-3y=3$.

b) Résoudre l'équation différentielle (E2).

c) En déduire l'unique solution f de l'équation différentielle (E1) vérifiant $f(0)=-3$.

2- *ABCD* est un carré. Les points *I* et *J* sont définis par $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.

Démontrer que les droites (*DI*) et (*JC*) sont orthogonales.

Sujet 6

1- Dans l'espace muni du repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ on considère les droites D, D_1 et D_2 de représentations paramétriques :

$$D: \begin{cases} x=2-3t \\ y=1+t \\ z=-3+2t \end{cases},\quad D_1: \begin{cases} x=6t \\ y=2-2t \\ z=5-4t \end{cases},\quad D_2: \begin{cases} x=7+2t \\ y=2+2t \\ z=-6-t \end{cases} \text{ avec } t\in\mathbb{R}.$$

Etudier la position relative des droites D et D_1, puis D et D_2, et enfin D_1 et D_2.

2- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{2x}-2e^x-3=0$.
(on pourra utiliser le changement de variable $X=e^x$)

Sujet 7

1- Soit la suite I_n définie pour $n > 0$ par : $I_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x} dx$.

a) Etudier le sens de variation de I_n .

b) Montrer que pour tout x de [0 ; 1], on a : $\frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{1+e^x} \leqslant \frac{1}{2}$

c) En déduire un encadrement de I_n et la limite de I_n .

2- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2\sqrt{2}\, z + 4 = 0$.
Ecrire ses solutions z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

Sujet 8

1- Dans le plan complexe muni du repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ on considère les points A d'affixe a et B d'affixe b.

On appelle M le milieu de [AB], E l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et F l'image de B par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

a) Déterminer les affixes de M, E et F en fonction de a et b.
b) Etablir une relation entre les affixes des vecteurs $\overrightarrow{FE}$ et $\overrightarrow{OM}$.
c) En déduire que $OM = \frac{1}{2} EF$, puis que les droites (OM) et (EF) sont orthogonales.

2- Dresser le tableau de variations de la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

Sujet 9

1- Une urne U_1 contient 5 boules rouges et trois boules vertes; une urne U_2 contient 1 boule rouge et 4 boules vertes.
On choisit l'une de ces deux urnes au hasard, puis on prélève au hasard une boule dans cette urne.
a) Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge ?
b) La boule tirée est rouge. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'urne U_1 ?

2- On considère les fonctions g et h définies sur $\mathbb{R}$ par :

$g(x) = \frac{x}{1+x^2}$ et $h(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$.

a) Donner une primitive de $\frac{u'}{u}$ si u est une fonction dérivable strictement positive.

b) Utiliser le résultat précédent pour calculer $I_1 = \int_0^1 g(x)\, dx$.

c) Soit $I_2 = \int_0^1 h(x)\, dx$. Calculer $I_1 + I_2$ et en déduire I_2 .

Sujet 10

1- A l'instant $t = 0$, on injecte dans le sang d'un patient une dose de 3mL d'un médicament.
Une étude du processus d'élimination de ce médicament a permis d'observer que la quantité $f(t)$, exprimée en mL, de médicament encore présente dans le sang du patient à l'instant t, exprimé en heures, est solution de l'équation différentielle $y' = -0,1\,y$.
a) Exprimer $f(t)$ en fonction de t.
b) Etudier les variations de f sur $[0;+\infty[$, puis donner l'allure de sa courbe représentative.
c) Au bout de combien de temps le sang du patient contient-il moins de 0,5mL de médicament ?

2- Dans l'espace muni du repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ on appelle H le projeté orthogonal du point $A(-1; 3; 5)$ sur la droite D passant par $B(0; -3; 4)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1;-2;-1)$.
a) Démontrer qu'il existe un réel a tel que $\overrightarrow{BH}=a\vec{u}$.
b) Déterminer les coordonnées de H.

Sujet 11

1- Le plan complexe muni du repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.
a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 4z + 16 = 0$. On appelle z_1 la solution dont la partie imaginaire est positive et z_2 l'autre.
b) Soient A et B les points d'affixes respectives z_1 et z_2. Calculer l'affixe z_3 du point C tel que ABC soit un triangle equilatéral direct. (on pourra utiliser une rotation).
c) Calculer le périmètre et l'aire de ABC.

2- Soit f la fonction définie sur I =]1 ; +∞ [par $f(x)=\dfrac{-3x^2+4x-3}{x-1}$.
a) Déterminer les réels a, b et c tels que $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-1}$.
b) En déduire les primitives de f sur I.
c) Déterminer la primitive F de f vérifiant $F(2) = 0$.

Sujet 12

1- Soit P le polynôme tel que $P(x)= x^3 - 3x^2 - 4x + 12$.
a) Montrer que 3 est une racine de P, puis déterminer les réels a, b et c tels que

$$P(x) = (x - 3)(ax^2 + bx + c).$$

b) Résoudre l'équation $P(x) = 0$.
c) En déduire les solutions des équations :

- $(\ln x)^3 - 3(\ln x)^2 - 4\ln x + 12 = 0$
- $e^{2x} - 3\,e^x - 4 + 12\,e^{-x} = 0$

2- Dans l'espace muni du repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ on considère le plan P d'équation $-x + y -2z = -4$ et le plan P' d'équation $x + y + z = 11$.
a) Montrer que les plans P et P' sont sécants.
b) Déterminer un point et un vecteur directeur de la droite d'intersection de ces deux plans.

Sujet 13

1- Soit f la fonction définie sur]-2; +2[par $f(x)=\frac{1}{3}\ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$.

a) Montrer que f est impaire.

b) Etudier les variations de f et calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition.

c) Soit C la courbe représentative de f. Déterminer ses asymptotes, puis une équation de sa tangente en 0. Donner l'allure de la courbe C.

2- Calculer le module et un argument des nombres complexes suivants :

- $z_1=\sqrt{6}-i\sqrt{2}$
- $z_2=\frac{5-i}{3+2\mathrm{i}}$.

Sujet 14

1- Soit f la fonction définie sur ℝ par $f(x)=e^{-x^2}$. On ne connait pas de primitive de f, mais on se propose de chercher un encadrement de $I=\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$.

a) Vérifier que pour tout x de ℝ, $f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)\,dt$.

b) Montrer que pour tout t de [0; 1] : $-2\mathrm{t}\leqslant f'(t)\leqslant\frac{-2}{e}t$.

c) En déduire un encadrement de f sur [0; 1], puis un encadrement de I.

2- On considère le nombre complexe $z=(\sqrt{3}+1)+i(\sqrt{3}-1)$.

a) Ecrire z^2 sous forme algébrique.

b) Déterminer le module et un argument de z^2, puis en déduire le module et un argument de z.

Sujet 15

1- Dans l'espace muni du repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ on considère les plans :

- P_1 d'équation $x - z + 1 = 0$
- P_2 d'équation $y - 2z - 2 = 0$.

a) Montrer que P_1 et P_2 sont sécants. Sont-ils orthogonaux ?

b) Donner une représentation paramétrique de la droite passant par A(-4; -3; 2) et parallèle à la droite D intersection des plans P_1 et P_2.

2- Soit f la fonction définie sur D= $]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[$ par $f(x)=x+\sqrt{x^2-1}$.

a) Montrer que pour tout x de D, $f(x)f(-x) = -1$.

b) Etudier la limite de f en $+\infty$, puis en déduire celle en $-\infty$.

c) Montrer que pour tout x de D autre que 1 ou -1, $f'(x)$ a le même signe que $f(x)$. En déduire les variations de f.

Sujet 15

1- Dans l'espace muni du repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère les plans :

- P_1 d'équation $x - z + 1 = 0$
- P_2 d'équation $y - 2z - 2 = 0$.

a) Montrer que P_1 et P_2 sont sécants. Sont-ils orthogonaux ?

b) Donner une représentation paramétrique de la droite passant par A(-4; -3; 2) et parallèle à la droite D intersection des plans P_1 et P_2.

2- Soit f la fonction définie sur D= $]-\infty ; -1] \cup [1 ; +\infty[$ par $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$.

a) Montrer que pour tout x de D, $f(x) f(-x) = -1$.

b) Etudier la limite de f en $+\infty$, puis en déduire celle en $-\infty$.

c) Montrer que pour tout x de D autre que 1 ou -1, $f'(x)$ a le même signe que $f(x)$. En déduire les variations de f.

Sujet 16

Proposition de consignes pour le candidat :

- L'épreuve orale est constituée d'une préparation d'une vingtaine de minutes suivie d'un entretien de même durée.
- Vous pouvez utiliser votre calculatrice et du brouillon.
- Les exercices du sujet suivant constituent une base d'argumentation pour l'entretien :

vous préparerez des réponses que vous devrez être capable de justifier en précisant, lorsque c'est utile, les notions de cours indispensables. *(Il est inutile de les rédiger complètement par écrit)*

- La démarche et la pertinence des justifications seront valorisées.
- Des questions complémentaires peuvent vous être posées au cours du dialogue.

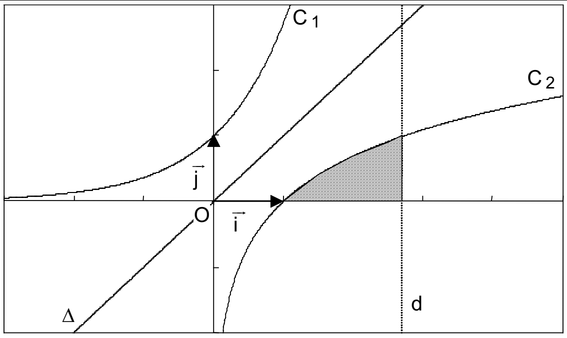
Exercice 1 Chaque question peut avoir une seule ou plusieurs bonnes réponses.

Les questions 1°) ; 2°) et 3°) sont indépendantes.

1. a. On donne ci-contre, dans un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$, les courbes d'équation :

$y = e^x$, $y = \ln x$, $y = x$ et $x = e$.

Associer chaque courbe à son équation.



b. La courbe C_1 est l'image de la courbe C_2 par :

❶ la rotation de centre O et d'angle $\pi/2$	❷ la translation de vecteur $\vec{u} = \vec{j} - \vec{i}$	❸ la symétrie centrale de centre O	❹ la symétrie axiale d'axe, la droite Δ

c. Hachurer sur le graphique une zone du plan ayant la même aire que la zone grisée.

d. L'aire de la zone grisée vaut, en unité d'aire :

❶ $\int_0^1 [e - \exp(x)]\,dx$	❷ $\int_0^1 \exp(x)\,dx$	❸ $\int_1^e \ln(x)\,dx$	❹ $\int_1^e [1 - \ln(x)]\,dx$

2. Soit C la courbe d'équation $y = e^{2+3\ln x}$

La tangente à C, au point d'abscisse e, a pour équation :

❶ $y = e^4 x + e^5$	❷ $y = 3e^5 x - 2e^5$	❸ $y = 2e^4 x - e^5$	❹ $y = 3e^4 x - 2e^5$

3. On considère une variable aléatoire X . Sa loi de probabilité est binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,4$.

a. L'espérance et la variance d'une telle loi sont :

❶ $E = 4$; $V = 2,4$	❷ $E = 10,4$; $V = 0,24$	❸ $E = 4$; $V = 0,24$	❹ $E = 10,4$; $V = 2,4$

b. La probabilité p(X = 2) est :

❶ $\binom{8}{2} \times 0,4^2 \times 0,6^8$	❷ $\binom{10}{2} \times 0,4^8 \times 0,6^2$	❸ $\binom{10}{2} \times 0,4^2 \times 0,6^8$	❹ $2 \times 0,4^2 \times 0,6^8$

Exercice 2 Les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel non nul par : $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ et $v_n = 1 + \frac{1}{n^2}$.

1. Calculer $u_{n+1} - u_n$. En déduire le sens de variation de la suite (u_n)

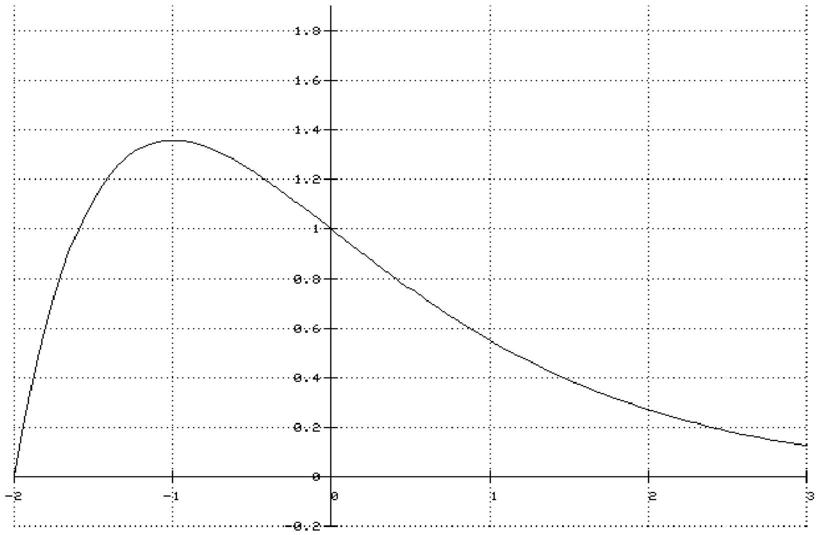
2. Déterminer le sens de variation de la suite (v_n).

3. Ces deux suites sont-elles adjacentes ?

4. Etudier la convergence des suites (u_n) et (v_n).

Sujet 17

1- La figure donne la représentation graphique de la fonction *f* définie sur ℝ par $f(x)=(ax+b)\,e^{cx}$, où *a*, *b* et *c* sont des réels à déterminer.



a) La courbe passe par les points A(-2; 0) et B(0; 1). Calculer *a* et *b*.
b) Au point C d'abscisse -1, la courbe admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses. Calculer *c*.
c) Montrer que l'axe des abscisses est une asymptote.
d) Déterminer les points d'intersection de la courbe avec la droite d'équation $y = x + 2$.

2- Ecrire le nombre complexe $\sqrt{3}-i$ sous forme exponentielle.
En déduire la forme algébrique de $(\sqrt{3}-i)^7$

Sujet 18

1- Une urne contient 5 boules rouges, 3 boules jaunes et 2 boules vertes indiscernables au toucher.
a) On tire successivement et sans remise 2 boules de l'urne. Calculer la probabilité d'obtenir :

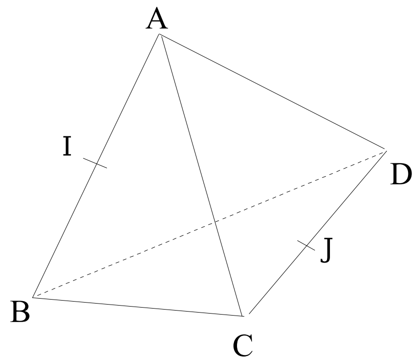
- 2 rouges
- 2 jaunes
- 2 vertes
- 2 boules de couleurs différentes

b) Mêmes questions si l'on effectue des tirages avec remise (on remet dans l'urne la boule issue du premier tirage).

2- Calculer $F(x)=\int_1^x t\ln t\,dt$ à l'aide d'une intégration par parties.
Déterminer ensuite $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

Sujet 19

1- $ABCD$ est un tétraèdre régulier d'arête a.
I et J sont les milieux respectifs de $[AB]$ et $[CD]$
a) Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.
En déduire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$. Que peut-on alors dire des droites (AB) et (CD) ?



b) Vérifier que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$. En déduire que la droite (IJ) est orthogonale aux droites (AB) et (CD).
c) Exprimer la distance IJ en fonction de a.
(on pourra utiliser le triangle AIJ)

2- Résoudre l'équation $2(\ln x)^2 - \ln x - 6 = 0$, puis l'inéquation $2(\ln x)^2 - \ln x - 6 > 0$.
(on pourra utiliser le changement de variable X= $\ln x$)

Sujet 20

1- On considère les nombres complexes $z_1 = -1 - i$, $z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$ et $Z = z_1 z_2$.
a) Ecrire ces trois nombres sous forme trigonométrique.
b) Déterminer la forme algébrique de Z.
c) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{11\pi}{12}$ et $\sin\frac{11\pi}{12}$.

2- On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 x\, dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^2 x\, dx$.
a) Calculer $I + J$.
b) En utilisant l'égalité $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, vérifier que $I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x\, dx$.
c) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $I - J$.
d) En déduire I et J.

Sujet 21

1- Soit u_n la suite définie par $u_0=2$ et $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+5$.

a) Calculer u_1 et u_2 .

b) Tracer les droites d'équations $y=\frac{1}{3}x+5$ et $y=x$. Utiliser la figure obtenue pour retrouver u_1 et u_2 . Que suggère la figure sur le comportement de la suite u_n ?

c) Soit v_n la suite définie par $v_n=u_n+h$. Déterminer h pour que v_n soit géométrique de rapport $\frac{1}{3}$.

d) Exprimer v_n , puis u_n en fonction de *n.* En déduire la limite de u_n .

2- L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
Déterminer les points d'intersection du plan P d'équation $x+2y-z+2=0$ et de la droite D passant par A(2; 1; -4) et de vecteur directeur $\vec{u}(2;-2;4)$.

Sujet 22

1- Soit F la fonction définie sur]0; +∞[par : $F(x)=\int_1^x \frac{e^t}{t}dt$.

a) Déterminer le sens de variation de F.

b) Prouver que, pour tout t de]0; +∞[, $\frac{e^t}{t}>\frac{1}{t}$.

En déduire, suivant les valeurs de x dans]0; +∞[, le signe de $\varphi(x) = F(x) - \ln x$.

c) Déduire de cette étude le comportement de F en +∞ et en 0.

2- Dans une urne, il y a 8 jetons jaunes et 12 jetons rouges indiscernables au toucher. On tire un jeton au hasard.

a) Déterminer la probabilité de l'évènement E : «le jeton tiré est jaune ».

b) On répète 7 fois cette épreuve; après chaque épreuve, le jeton est remis dans l'urne. Calculer la probabilité des évènements :

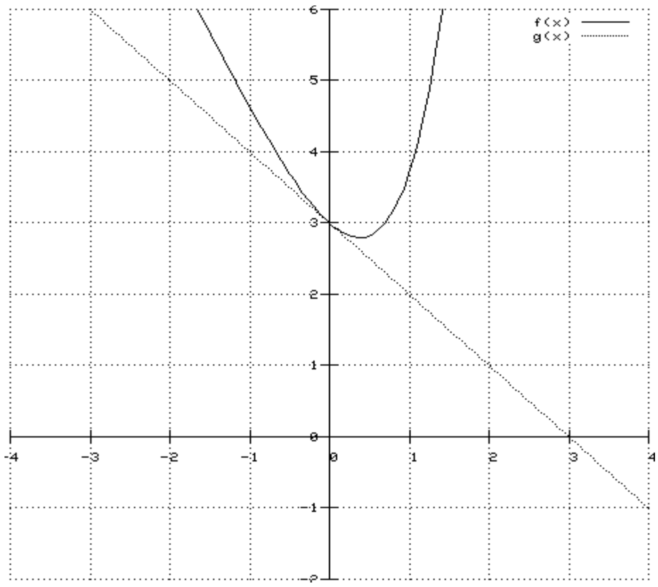
- A : «E se produit exactement trois fois ».
- B : «E se produit au moins six fois ».

Sujet 23

1- La figure donne la courbe représentative de la fonction f définie sur ℝ par $f(x)=ax+b+xe^x$, ainsi que sa tangente en 0 d'équation $y = g(x)$.

a) Déterminer $f(0)$ et $f'(0)$ à l'aide du graphique.

b) En déduite les valeurs de a et b.



2- Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On appelle A, B et C les points d'affixes $z_A=2\mathrm{i}$, $z_B=6$, $z_C=(3+\sqrt{3})+i(3\sqrt{3}+1)$.

Calculer $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$. Que peut-on en déduire ?

Sujet 24

1- Soit f la fonction définie sur]0; +∞[par $f(x)=1-\dfrac{1}{x}-2\ln x$

a) Calculer la dérivée f' de f.

b) Etudier les variations de f.

c) Préciser les limites de f en 0 et en +∞.

(pour l'étude en 0 on pourra écrire $\dfrac{1}{x}+2\ln x=\dfrac{1}{x}(1+2x\ln x)$)

2- Une urne contient quatre boules rouges et une boule blanche. On prélève une boule, on note sa couleur, on la remet dans l'urne. On recommence cette expérience trois fois de suite.

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules rouges obtenues.

a) Déterminer la loi de X.

b) Calculer son espérance, et son écart-type.